Concours interne d'administrateur de
l'Institut national de la statistique et des études économiques

Session 2025

Épreuve de mathématiques

Durée: 4 heures

Le sujet comporte 6 pages y compris celle-ci.

- Tous documents et appareils électroniques interdits.

- L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes, chacune comptant pour la moitié de la note finale. Chaque partie contient plusieurs exercices ou problèmes indépendants. À l'intérieur de chaque exercice ou problème, certaines questions sont indépendantes. Le résultat d'une question peut être admis pour répondre aux suivantes.

- Il sera tenu compte de la présentation, de la pertinence et de la clarté des justifications.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

- Le candidat ne doit porter aucun signe distinctif sur les copies : pas de signature, nom, grade, même fictifs.

- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.

Partie 1: analyse et algèbre.

Problème.

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
Si m est un entier naturel, on note $[\![0, m]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $0 \leq k \leq m$.

Le but de ce problème est de montrer que, pour tout endomorphisme f de E, il existe un entier p qui vérifie

$$(1) \qquad \begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ E = \mathbf{Ker}(f^p) \oplus \mathbf{Im}(f^p). \end{cases}$$

Partie I.

1. ***Premier exemple.***
   Dans cette question seulement, on suppose que $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$.
   On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   On suppose que la matrice représentative de f dans cette base est $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.
   - **(a)** **Calculer A^2.**
   - **(b)** **Déterminer une base de Ker(f) et une base de Im(f).**
   - **(c)** **Déterminer une base de Ker(f^2) et une base de Im(f^2).**
   - **(d)** **Donner la valeur minimale de p solution du problème.**
2. ***Second exemple.***
   Dans cette question seulement, on suppose que $n = 4$ et $E = \mathbb{R}^4$.
   On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit m un réel.
   On suppose que la matrice représentative de f dans cette base est $A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   - **(a)** **Déterminer le rang de A_m. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m la matrice A_m est-elle inversible ?**
   - **(b)** **Déterminer, selon les valeurs de m, le plus petit entier p solution du problème.**

On revient désormais au cas général.

3. **On suppose que l'endomorphisme f est bijectif. Donner la valeur minimale de p solution du problème.**
4. **On suppose, dans cette question, que l'endormophisme f n'est pas bijectif.**
   - **(a)** **Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \dim(\mathbf{Ker}(f^k))$. Etudier la monotonie de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.**
   - **(b)** **Soit F l'ensemble des entiers naturels k tels que $a_k = a_{k+1}$. Montrer que F est non-vide.**
   - **(c)** **En déduire l'existence d'un entier p vérifiant les trois conditions suivantes :**
     ***$p \neq 0$.**
     ***pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\mathbf{Ker}(f^k) \neq \mathbf{Ker}(f^{k+1})$.**
     ***$\mathbf{Ker}(f^p) = \mathbf{Ker}(f^{p+1})$.**
   - **(d)** **Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq p$,**
     $$\mathbf{Ker}(f^k) = \mathbf{Ker}(f^{k+1}).$$
   - **(e)** **Montrer que l'entier p est solution du problème.**
   - **(f)** **Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Ker}(f^p)$ induit un endomorphisme nilpotent de $\mathrm{Ker}(f^p)$ et que la restriction de f à $\mathrm{Im}(f^p)$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}(f^p)$.**

Partie II.

Dans toute la suite du problème, $\boxed{p \text{ \textit{désigne le plus petit entier solution du problème}}}$.
On admet que c'est celui qui a été obtenu dans la première Partie (question 4).

1. **On suppose que** $p = n$.

   (a) **Montrer que** f^n **est l'endomorphisme nul.**

   (b) **Déterminer, dans ce cas, la dimension de Ker**(f).

2. **Dans cette question, on suppose que** $n = 3$ **et** $E = \mathbb{R}^3$. **On note** (e_1, e_2, e_3) **la base canonique de** $\mathbb{R}^3$. **On suppose que la matrice représentative de** f **dans cette base est** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) **Déterminer une base de Ker**(f).

   (b) **Déterminer une base** $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ **de** $\mathbb{R}^3$ **telle que**

   $$f(\varepsilon_1) = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \qquad f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2.$$

   (c) **Écrire la matrice représentative de** f **dans cette nouvelle base.**

   (d) **L'endomorphisme** f **est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?**

   (e) **Trouver l'entier** p, **solution minimale du problème.**

3. **On suppose ici que** p **est supérieur ou égal à** 2 **et que l'on a Ker**$(f^p) = E$.

   (a) **Montrer que pour tout** $k \in [\![0, p-1]\!]$, **on peut définir un sous-espace vectoriel, non réduit au vecteur nul, supplémentaire de Ker**(f^k) **dans Ker**(f^{k+1}).

   (b) **En déduire l'existence d'une base de** E **dans laquelle** f **est représenté par une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes de la diagonale sont nuls. Expliquer comment construire une telle base.**

Partie III.

Soit a **un réel non nul. On note id**$_E$ **l'application identité de** E **et** $0_{\mathcal{L}(E)}$ **l'application nulle.**
Soit f **un endomorphisme de** E **tel que**

$$(2) \quad \begin{cases} f \neq a\,\mathbf{id}_E & \text{(i)} \\ f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)} & \text{(ii)} \\ f^{n-1} \circ (f - a\,\mathbf{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)} & \text{(iii)} \\ \forall k \in [\![0, n-2]\!], \quad f^k \circ (f - a\,\mathbf{id}_E) \neq 0_{\mathcal{L}(E)} & \text{(iv).} \end{cases}$$

1. (a) **Montrer que** 0 **est valeur propre de** f.

   (b) **Montrer que** a **est valeur propre de** f.

   (c) **Déterminer le spectre de** f.

2. (a) **Montrer que pour tout entier** $k \in \mathbb{N}$,

   $$\mathbf{Ker}(f^k) \cap \mathbf{Ker}(f - a\,\mathbf{id}_E) = \{0_E\}$$

   (b) **Montrer que**

   $$\mathbf{Ker}(f^{n-1}) \oplus \mathbf{Ker}(f - a\,\mathbf{id}_E) = E.$$

3. (a) **On suppose que** $p < n-1$. **Montrer que dans ce cas**

   $$\mathbf{Ker}(f^p) \oplus \mathbf{Ker}(f - a\,\mathbf{id}_E) = E.$$

   (b) **En déduire une contradiction.**

4. **Conclure en donnant la seule valeur de l'entier** p **solution du problème.**

Exercice.

1. **Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer que la fonction**

$$h : \theta \mapsto \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)$$

est continue sur $[0, \pi]$.

On note alors F la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \qquad F(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right) d\theta.$$

2. **Étudier la parité de la fonction F.**

3. **Montrer que**

$$\ln(1 - \cos\theta) \underset{\theta \to 0}{\sim} 2\ln(\theta).$$

4. **Montrer que l'on peut définir $F(1)$ et $F(-1)$.**

On admet que la fonction F ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.

5. **Soit n un entier supérieur ou égal à 2.**

   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} = 1$.

   (b) Montrer que

$$X^{2n} - 1 = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

6. **(a) Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,**

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}\right)\right).$$

   (b) Déterminer l'expression de $F(x)$ (on distinguera les cas $x \in]-1, 1[$ et $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$).

   (c) Préciser les valeurs de $F(1)$ et $F(-1)$.

   (d) En utilisant la valeur trouvée pour $F(1)$, prouver la convergence et calculer la valeur de

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt.$$

Partie 2 : probabilités et statistiques.

Notations:

On note $E[X]$ **et** $V(X)$ **respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle** X**, lorsque ces quantités existent.**

Exercice 1.

Dans cet exercice, n **désigne un entier naturel non nul. Soient** a **et** b **deux réels positifs tels que** $a < b$**. Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$**. Soit** X **une variable aléatoire à valeurs dans** $[a, b]$ **et soit** $(X_1, \ldots, X_n)$ **un** n**-uplet de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que** X**. On note** $\overline{X}_n$ **la moyenne empirique de l'échantillon :**

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Hoeffding :

$$\forall t > 0,\ P\left(\left|\overline{X}_n - E[\overline{X}_n]\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{2nt^2}{(b-a)^2}\right).$$

On note ψ_X **la fonction définie pour tout** $s \in \mathbb{R}$ **par**

$$\psi_X(s) = E[e^{sX}].$$

On suppose que X **est centrée.**

1. Démontrer que pour tout $x \in]a, b[$ **fixé,** $s \mapsto e^{sx}$ **est convexe et en déduire que**

$$e^{sx} \leq \frac{x-a}{b-a}e^{sb} + \frac{b-x}{b-a}e^{sa}.$$

2. Démontrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$**,**

$$\psi_X(s) \leq \frac{b}{b-a}e^{sa} - \frac{a}{b-a}e^{sb}.$$

3. On pose $p = b/(b-a)$**,** $q = 1-p$ **et** $u = (b-a)s$**. On considère la fonction**

$$u \mapsto \phi(u) = \ln\left(pe^{sa} + qe^{sb}\right).$$

Pour tout réel $u > 0$**, expliciter** $\phi(u)$ **en fonction de** u **et en déduire qu'il existe** $\theta \in]0, u[$ **tel que :**

$$\phi(u) = \phi(0) + \phi'(0)u + \frac{1}{2}\phi''(\theta)u^2.$$

4. Déterminer $\phi(0)$**,** $\phi'(0)$**,** $\phi''(u)$ **et démontrer que** $\phi''(\theta) \leq \frac{1}{4}$**.**

5. Démontrer que,

$$\forall s > 0,\ \psi_X(s) \leq \exp\left(\frac{s^2}{8}(b-a)^2\right).$$

6. Rappeler et démontrer l'inégalité de Markov.

7. On suppose toujours X **centrée. Démontrer que,**

$$\forall t > 0,\ \forall s > 0,\ P\left(\overline{X}_n \geq t\right) \leq e^{-st}\left(\psi_X\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n.$$

8. On ne suppose plus que X **est centrée. Déduire des questions précédentes que :**

$$P\left(\overline{X}_n - E[\overline{X}_n] \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{2nt^2}{(b-a)^2}\right),$$

puis que

$$P\left(\left|\overline{X}_n - E[\overline{X}_n]\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{2nt^2}{(b-a)^2}\right).$$

9. Soit $\delta \in]0, 1[$**. Démontrer que :**

$$\forall n \geq 1,\ P\left(\left|\overline{X}_n - E[\overline{X}_n]\right| \leq \frac{|a-b|\sqrt{\ln(2/\delta)}}{\sqrt{2n}}\right) \geq 1-\delta.$$

Exercice 2.

Soit θ un réel strictement positif. Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, de même loi uniforme sur le segment $[-\theta\sqrt{3}, \theta\sqrt{3}]$. Pour $n \geq 1$, on pose:

$$S_n = X_1^2 + \ldots + X_n^2, \quad T_n = \sqrt{\frac{S_n}{n}}, \quad U_n = \sqrt{n}(T_n - \theta), \quad V_n = \frac{\sqrt{n}}{2\theta}(T_n^2 - \theta^2).$$

1. Justifier le fait que X_1 possède des moments d'ordre 4, puis calculer $E[X_1^4]$ et $V(X_1^2)$.

2. Démontrer que $(S_n/n)_n$ converge en probabilité vers θ^2 et en déduire que $(T_n)_n$ converge en probabilité. Préciser sa limite.

3. Montrer que $(V_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant une loi normale centrée et de variance $\theta^2/5$.

4. Démontrer que pour tout a réel non nul fixé,

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \neq -a, \; x - a = \frac{x^2 - a^2}{2a} - \frac{(x^2 - a^2)^2}{2a(x + a)^2}.$$

5. Montrer que $U_n = V_n - W_n$ où W_n est une variable aléatoire vérifiant, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq W_n \leq \frac{\sqrt{n}}{2\theta^3}\left(T_n^2 - \theta^2\right)^2.$$

6. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} E[W_n] = 0,$$

puis que $(W_n)_n$ converge vers 0 en probabilité.

Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est à support compact s'il existe un intervalle $K = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \notin K$, $f(x) = 0$.

On admet qu'une suite de variables aléatoires réelles $(U_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle U si, et seulement si, pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact, on a

$$\lim_{n\to+\infty} E[|f(U_n) - f(U)|] = 0.$$

7. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à support compact K. Démontrer l'existence de

$$M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

8. Soit $\epsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$E[|f(U_n) - f(V_n)|] \leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \times P[|W_n| \geq \delta].$$

9. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} E[|f(U_n) - f(V_n)|] = 0.$$

10. En déduire que $(U_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire U dont on donnera la loi.